Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

23/06/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 140 min + 10 (consegna online)

Norme generali:

- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame. La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. Per Calcolo 2 è permesso utilizzare un foglio A4 con degli appunti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio. Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

23/06/2020 - Tema A;
Tempo a disposizione: 140 min + 10 (consegna online)

Problema 1 (8 punti)

1.1 (4p) Calcolare tutte le soluzioni di $x^2y' = -(x^2 - 1)(y - 1)^3$.

1.2 (4p) Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(1) = 0$ e determinarne il dominio di esistenza. Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 3$ e determinarne il dominio di esistenza.

Problema 2 (6 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla funzione parametrica
$r(t) = (2(\cos t + t\sin t)\ ,\ 2(\sin t - t\cos t))$, con $t \in [0, 2\pi]$

2.1 (2p) Determinare se γ è chiusa e regolare (Facoltativo: mostrare che γ è semplice).

2.2 (2p) Scrivere un'equazione parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = \pi$.

2.3 (2p) Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Verificare che il sostegno della curva γ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma f$.

Problema 3 (9 punti)

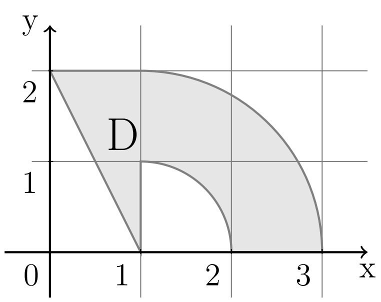
Sia $f(x, y) = x^2y + y^3 - 3y$.

3.1 (2 p) Determinare il dominio di f e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico della sezione $x = 0$. Disegnare, se possibile, la curva di livello a $z = 0$ (suggerimento: cosa succede se $y = 0$? Poi porre $y \neq 0$ ...)

3.2 (5 p) Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

3.3 (2 p) Determinare il versore di massima crescita nel punto $(-1, 1/2)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Problema 4 (7 punti)



4.1 Calcolare l'area e il baricentro del dominio D rappresentato in figura (le curve alla frontiera di D sono due archi di circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggi 1 e 2).

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

23/06/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 140 min + 10 (consegna online)

Problema 1 (8 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni di $x^2y' = -(x^2-1)(y-1)^3$.

(4 Punti) L'equazione differenziale ordinaria è del primo ordine a variabili separabili. Si nota che $y = 1$ è soluzione costante dell'equazione. Inoltre, per $x = 0$ si ottiene come unica soluzione $y = 1$. Si considera quindi $y \neq 1$ e $x \neq 0$, si separano le variabili e si integrano ambo i membri:

$$\begin{aligned} \int \frac{y'}{(y-1)^3}\,dx &= \int -1 + \frac{1}{x^2}\,dx \\ -\frac{1}{2}(y-1)^{-2} &= -x - \frac{1}{x} + c \qquad , c \in \mathbb{R} \\ (y-1)^2 &= \frac{x}{2x^2-2cx+2} \\ |y-1| &= \sqrt{\frac{x}{2x^2-2cx+2}} \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni hanno la forma

$$\begin{cases} y = 1 + \sqrt{\frac{x}{2x^2-2cx+2}} & \text{se } y > 1 \\ y = 1 - \sqrt{\frac{x}{2x^2-2cx+2}} & \text{se } y < 1 \end{cases}$$

a cui va aggiunta la soluzione costante se $y = 1$.

1.2 (2 punti) Trovare la soluzione che soddisfa $y(1) = 0$ e determinarne il dominio esistenza.

Bisogna considerare la seconda soluzione e imporre le condizioni iniziali:

$$0 = 1 - \sqrt{\frac{1}{4-2c}} \implies 1 = \frac{1}{4-2c} \implies c = \frac{3}{2}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y = 1 - \sqrt{\frac{x}{2x^2-3x+2}}$

Il dominio è dato da

$$\frac{x}{2x^2-3x+2} \geq 0$$

da cui si ottiene

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$$

Sebbene la funzione sia definita in $x = 0$, la funzione non è differenziabile in $x = 0$, per cui tale punto viene escluso dal dominio della soluzione (infatti, questa soluzione si è ottenuta partendo dall'ipotesi $x \neq 0$).

1.3 (2 Punti) Trovare la soluzione che soddisfa $y(0) = 3$ e determinarne il dominio.

Non esiste alcuna soluzione che soddisfa tale condizione. Infatti, sostituendo nell'equazione differenziale $x = 0$ si ottiene $y = 1$. Cioè, non può essere che la soluzione y assuma un valore diverso da 1 per $x = 0$.

Problema 2 (6 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla funzione parametrica

$$r(t) = (2(\cos t + t\sin t)\ ,\ 2(\sin t - t\cos t))\ , \quad t \in [0, 2\pi]$$

2.1 Determinare se γ è chiusa e regolare (Facoltativo: mostrare che γ è semplice).

(2 punti) Si ha che $r(0) = (2, 0)$ e $r(2\pi) = (2, -4\pi)$. Quindi γ non è chiusa.

Per la regolarità bisogna calcolare il vettore tangente e la sua norma:

$$r'(t) = (2t\cos t, 2t\sin t) \quad , \quad \|r'(t)\| = |2t|$$

Il vettore tangente si annulla in $t = 0$, quindi $r(t)$ non è regolare. $r(t)$ è regolare in $]0, 2\pi]$.

Per la semplicità, si assuma che $r(t_1) = r(t_2)$. Allora deve essere $\|r(t_1)\|^2 = \|r(t_2)\|^2$, cioè:

$$2\sqrt{1 + t_1^2} = 2\sqrt{1 + t_2^2}$$

che implica $t_1 = \pm t_2$. Siccome per il dominio $t > 0$, deve essere $t_1 = t_2$, che implica che la curva è semplice.

2.2 Scrivere un'equazione parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = \pi$.

(2 punti)

Si ha $\mathbf{r}(\pi) = (-2, 2\pi)$ e $\mathbf{r}'(\pi) = (-2\pi, 0)$. Quindi un'eq. della retta tangente è:

$$\begin{cases} x(t) = -2 - 2\pi(t - \pi), & t \in \mathbb{R} \\ y(t) = 2\pi \end{cases}$$

2.3 Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Verificare che il sostegno della curva γ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma f$.

(2 punti) Il dominio di f è $\mathbb{R}^2$, quindi il supporto di γ è contenuto nel dominio. Si ha inoltre:

$$f(r(t)) = f\left(2(\cos t + t\sin t)\ ,\ 2(\sin t - t\cos t)\right) = 2\sqrt{1 + t^2}$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} f(r(t))\|r'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 4t\sqrt{1 + t^2}\, dt = \left[\frac{4}{3}(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}(1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}$$

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x, y) = x^2y + y^3 - 3y$

3.1 (3 punti) Determinare il dominio di f e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico della sezione $x = 0$. Disegnare, se possibile, la curva di livello a $z = 0$ (suggerimento: cosa succede se $y = 0$? Poi porre $y \neq 0$ ...)

Il dominio di f è $D_f = \mathbb{R}^2$ e la funzione è $\mathcal{C}^2(D_f)$ in quanto funzione polinomiale in x e y (anche $\mathcal{C}^\infty$).

Il grafico della sezioni è mostrato in Figura 1; il grafico della curva di livello è mostrato in Figura 2.

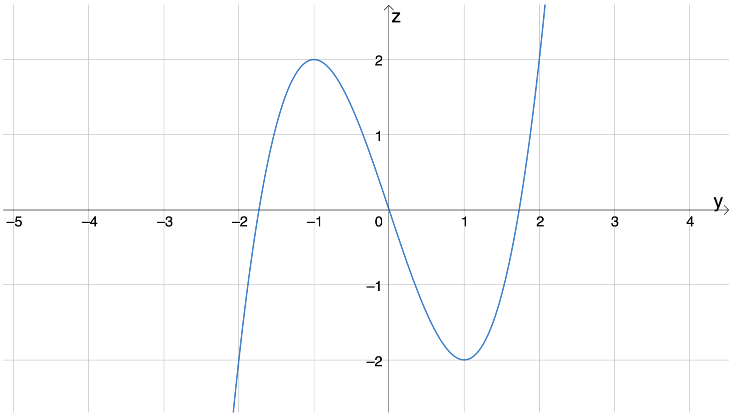


Figura 1: Sezione $x = 0$, $z = y^3 - 3y$

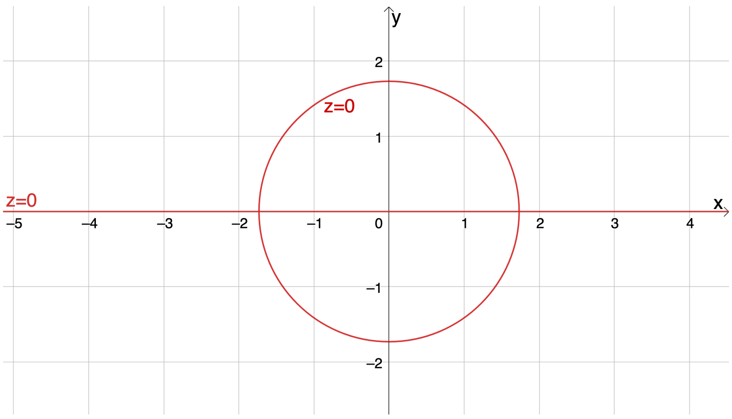


Figura 2: La curva di livello $z = 0$ è data dalla retta $y = 0$ e dalla circonferenza $x^2+y^2 = 3$.

3.2 (4 punti) Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 3y^2 - 3 \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x,y) = 0$ si ottiene dalla prima equazione $x = 0$ oppure $y = 0$.

Per $x = 0$, dalla seconda equazione si ottiene $y = \pm 1$.

Per $y = 0$, dalla seconda equazione si ottiene $x = \pm\sqrt{3}$.

I punti critici quindi sono: $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (0,-1)$, $P_3 = (\sqrt{3},0)$, $P_4 = (-\sqrt{3},0)$.

Si usa il test della matrice Hessiana per caratterizzare tali punti. In un punto (x,y) la matrice Hessiana H_f è:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 6y \end{pmatrix}$$

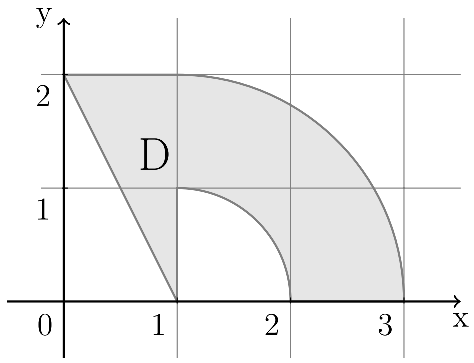
- P_1: $H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, det $(H_f(0,1)) = 12$ e il primo termine di $H_f(0,1)$ vale $2 > 0$, quindi H_f è definita positiva in P_1 e P_1 è minimo locale.
- P_2: $H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, det $(H_f(0,-1)) = 12$ e il primo termine di $H_f(0,1)$ vale $-2 < 0$, quindi H_f è definita negativa in P_2 e P_2 è massimo locale.
- P_3: $H_f(\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$, det $(H_f(\sqrt{3},0)) = -12$ quindi H_f è indefinita in P_3 e P_3 è punto di sella.
- P_4: $H_f(-\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$, det $(H_f(-\sqrt{3},0)) = -12$ quindi H_f è indefinita in P_4 e P_4 è punto di sella.

3.3 (2 punti) Determinare il versore di massima crescita nel punto $(-1, 1/2)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Il versore di massima crescita corrisponde al gradiente calcolato in $(-1, 1/2)$ e normalizzato: $\nabla f(-1,1/2) = (-1, -5/4)$ che ha norma $\frac{\sqrt{41}}{4}$. Quindi $\mathbf{v} = (-\frac{4}{\sqrt{41}}, -\frac{5}{\sqrt{41}})$.

Il piano tangente ha equazione $z = -(x+1) - \frac{5}{4}(y - \frac{1}{2}) - \frac{7}{8}$.

Problema 4 (7 punti)



4.1 Calcolare l'area e il baricentro del dominio D rappresentato in figura (le curve alla frontiera di D sono due archi di circonferenza di centro $(1,0)$ e raggi 1 e 2).

SOLUZIONE DA AGGIORNARE

Il dominio D si può pensare come $D = D_1 \cup D_2$ con D_1 data dal triangolo di vertici (1,0), (1,2), (0,2):

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -2x + 2 \leq y \leq 2\}$$

e D_2 dato dalla porzione di cerchio che si può esprimere facilmente in coordinate polari di centro (1,0) con la sostituzione $x = 1 + \rho\cos\theta$, $y = \sin\theta$.

In coordinate polari D_2 si scrive come segue:

$$D_2 = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq \rho \leq 2\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_1} dx\,dy + \int\int_{D_2} dx\,dy$.

$$\int\int_{D_1} dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-2x+2}^2 1\,dy\right) dx = 1$$

$$\int\int_{D_2} dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 \rho\,d\rho\right) d\theta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3\pi}{4}$$

Quindi l'area di D vale $(4 + 3\pi)/4$ (1 punto).

Per il calcolo del baricentro si calcolano $\int\int_D x\,dx\,dy$ e $\int\int_D y\,dx\,dy$:

Coordinata x_c:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1} x\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{-2x+2}^2 x\,dy\right) dx = \\ &= \int_0^1 x\,[y]_{-2x+2}^2\,dx = \int_0^1 x(2x)\,dx = \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2} x\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 (1 + \rho\cos(\theta))\rho\,d\rho\right) d\theta = \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho^2\,d\rho\right) + \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho\,d\rho\right) = \\ &= [\sin(\theta)]_0^{\pi/2}\left[\rho^3/3\right]_1^2 + \frac{3\pi}{4} = \frac{7}{3} + \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Quindi la coordinata x del baricentro è (3 punti):

$$x_C = (\frac{12+3\pi}{4})/(\frac{4+3\pi}{4}) = (\frac{12+3\pi}{4+3\pi}) = 1,595$$

Coordinata y_c:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1} y\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{-2x+2}^{2} y\,dy\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2x+2}^{2} dx = \int_0^1 2 - \frac{(-2x+2)^2}{2}\,dx = \\ &= \left[2x + \frac{(-2x+2)^3}{12}\right]_2^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2} y\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 (\rho\sin(\theta))\rho\,d\rho\right) d\theta = \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} \sin(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho^2\,d\rho\right) = \\ &= [-\cos(\theta)]_0^{\pi/2}\left[\rho^3/3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Quindi la coordinata y del baricentro è (3 punti):

$$x_C = (\frac{11}{3})/(\frac{4+3\pi}{4}) = (\frac{44}{12+9\pi}) \approx 1,092$$